Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

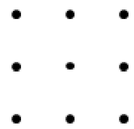
Окружно такмичење из математике
ученика основних школа

21.03.2021.

IV разред

1. На три полице у Вериној соби распоређено је 167 књига. Вера је на трећу полицу ставила нове 23 књиге. Затим је са треће полице пребацила на прву полицу 26 књига, а све књиге са друге полице поклонила свратишту за напуштену децу. Након тога је на све три полице укупно остало 135 књига. Колико књига је Вера поклонила свратишту за напуштену децу?

2. а) Колико квадрата можеш да нацрташ тако да су им темена по четири тачке приказане на цртежу?
б) Израчунај површину сваког од тих квадрата ако је растојање између две суседне тачке 5 mm.



3. За нумерацију једне књиге употребљено је 540 цифара. Колико страница има та књига, ако је свака страна нумерисана неким бројем?

4. Док Аца поједе две трешње, Бора поједе пет, а док Бора поједе три трешње, Воја поједе седам трешања. Аца и Воја укупно су појели 82 трешње. Колико је трешања за то време појео Бора?

5. У низ је написано 11 бројева тако да је збир свака три узастопна броја једнак 18. При томе је збир свих 11 бројева једнак 64. Који је средишњи (шести) број у овом низу?

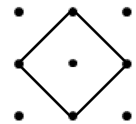
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

IV РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 55/2**) Када Вера стави нове 23 књиге на трећу полицу онда ће укупно на све три полице бити 167 + 23 = 190 књига [**5 поена**]. Вера је поклонила свратишту за напуштену децу онолико књига за колико се смањио укупан број књига на све три полице након што је поклонила књиге, тј. 190 – 135 = 55 књига [**15 поена**].

2. (**МЛ 55/2**) а) Квадрата има 6 и то су: 4 квадрата странице 5mm [**4 поена**], 1 квадрат странице 10 mm [**1 поен**] и квадрат дат на слици [**5 поена**].



б) Површине квадрата странице 5 mm су по 25 mm^2 [**2 поена**]. Површина квадрата сранице 10 mm је 100 mm^2 [**3 поена**]. Површина квадрата са слике је 50 mm^2 [**5 поена**].

3. За нумерацију једноцифреним бројевима употребљено је 9 цифара [**2 поена**], а двоцифреним бројевима 90 · 2 = 180 цифара [**3 поена**]. Дакле, преостала је још 540 – (9 + 180) = 351 цифра [**2 поена**] за нумерацију троцифреним бројевима. Од 351 цифре може се написати 351 : 3 = 117 троцифрених бројева [**7 поена**]. Дакле, књига има 9 + 90 + 117 = 216 страна [**6 поена**].

4. За време док Бора поједе 15 трешања, Аца поједе 3 · 2 = 6 трешања [**5 поена**], а Воја 5 · 7 = 35 трешања [**5 поена**]. Дакле, док Бора поједе 15 трешања, Аца и Воја укупно поједу 41 трешњу. Да би појели 82 трешње треба да поједу још 41 трешњу. За то време ће Бора појести још 15 трешања, па закључујеш да Бора поједе 15 + 15 = 30 трешања [**10 поена**] док Аца и Воја поједу 82 трешње.

5. Нека су бројеви у низу, редом: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *J*, *K*. Бројеве у низу можеш да групишеш на следећи начин [**5 поена**]:

$$\underbrace{A,\ B,\ C}_{18},\ \underbrace{D,\ E,\ \mathrlap{\overbrace{F,\ G,\ H}^{18}}F}_{18},\ \overbrace{I,\ J,\ K}^{18}$$

Збир свих груписаних бројева је 4 · 18 = 72 [**3 поена**]. У овим збировима сваки број учествује једанпут, осим средишњег броја у низу који се јавља два пута [**6 поена**]. Дакле, $72 = (A + B + C + D + E + F + G + H + I + J + K) + F = 64 + F$, одакле је $F = 8$ [**6 поена**].

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа

21.03.2021.

V разред

1. За сва дечија обданишта у једном граду треба обезбедити дневно 120 kg поморанџи, 260 kg банана и 380 kg јабука.
а) Колико највише обданишта може да постоји у том граду ако се у свако распоређује по иста количина од сваке врсте воћа (Број килограма сваке распоређене врсте воћа је природан број)?
б) Колико лимуна треба обезбедити за сва та обданишта ако се троши пет пута мање лимуна него поморанџи и јабука укупно?

2. Угао α је већи од свог комплементног угла тачно за онолико за колико је мањи од свог суплементног угла. Израчунати угао α.

3. Један пешчани сат мери 10 минута (пресипање песка из једног у други део траје 10 минута), а други 7 минута. Како се коришћењем ова два сата може измерити 23 минута?

4. Ана је записала све бројеве дељиве са 2 од 2 до 2022, редом један за другим без раздвајања. Која цифра се налази на 2021. месту?

5. Одреди највећи заједнички делилац за бројеве $n = 111111$ (6 јединица) и $m = 111111111$ (9 јединица).

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

V РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 55/2**) а) Како је НЗД(120, 260, 380) = 20 [**4 поена**], то у граду највише може да буде 20 обданишта [**6 поена**].
б) Поморанџи и јабука укупно се троши 500 kg, па је потребно обезбедити 500 kg : 5 = 100 kg лимуна дневно [**10 поена**].

2. Из $\alpha - (90° - \alpha) = (180° - \alpha) - \alpha$ [**8 поена**] добијамо $2\alpha - 90° = 180° - 2\alpha$ [**5 бодова**], тј. $4\alpha = 270°$ [**5 поена**],одакле је $\alpha = 67°\ 30'$ [**2 поена**].

3. Једно решење је следеће: Истовремено се покрену оба сата, па се после 7 минута зауставе (када истекне песак из мањег сата). У већем сату је преостало песка за 3 минута. Тражено време се мери тако што прво пустимо преостала 3 минута да истекну из већег сата, а затим још 2 пута се измери по 10 минута већим сатом [**20 поена**].

4. Једноцифрени парни бројеви заузели су 4 места у низу [**1 поен**], двоцифрени парни заузели су $45 \cdot 2 = 90$ места [**2 поена**], а троцифрени парни $450 \cdot 3 = 1350$ места [**2 поена**]. Дакле, ови бројеви укупно су заузели $4 + 90 + 1350 = 1444$ места[**2 поена**]. До 2021. места потребно је исписати још $2021 - 1444 = 577$ цифара. Како је $577 = 4 \cdot 144 + 1$, то се помоћу њих може написати 144 парних четвороцифрених бројева [**7 поена**], а на 2021. месту биће прва цифра 145. парног четвороцифреног броја. Како је 145. парни четвороцифрени број 1288, то је тражена цифра 1 [**6 поена**].

5. Имамо да је $n = 111 \cdot 1001$ и $m = 111 \cdot 1001001$, па је 111 заједнички делилац бројева n и m [**10 поена**]. Како је $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ и како број 1001001 није дељив ни са једним од ових бројева, то је НЗД(n, m) = 111 [**10 поена**].

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

21.03.2021.

VI разред

1. Одреди рационалан број са имениоцем 7 који је мањи од $-\frac{5}{19}$, а већи од $-\frac{6}{19}$.

2. Филип је написао неколико различитих природних бројева чији је збир једнак 100, користећи при томе само две различите цифре. Колико је највише бројева могао да напише Филип?

3. У једној кутији се налазе куглице плаве, зелене и црвене боје. Познато је да је потребно да се извуче 11 куглица да бисмо били сигурни да се међу њима налазе куглице све три боје. Потребно је да се извуче 10 куглица да међу њима буде бар једна куглица зелене боје. Да би се међу извученим куглицама налазила бар једна куглица црвене боје, потребно је да се извуче бар 8 куглица. Колико куглица плаве, колико црвене, а колико зелене боје има у кутији?

4. Једно одељење је пошло на бициклистичку туру. Прву паузу су направили када су прешли $\frac{2}{7}$ планираног пута. После 54 km поново су направили паузу. Тада су прешли $\frac{7}{11}$ пута. Колико километара је износио планирани пут?

5. Симетрала унутрашњег угла код темена *A* троугла *ABC* сече страницу *BC* у тачки *D*. Нека је *E* унутрашња тачка странице *AB* при чему је $\measuredangle ADB = 94°$, $\measuredangle ACE = 38°$ и $\measuredangle CEB = 84°$. Одредити која је најкраћа, а која најдужа страница троугла *ABC*.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

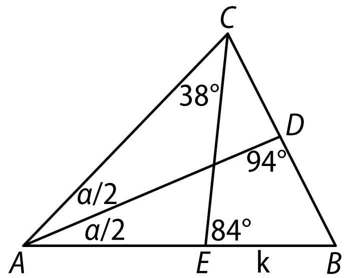
1. (**МЛ 55/2**) Из $-\frac{5}{19} > \frac{x}{7} > -\frac{6}{19}$ налазимо $-35 > 19x > -42$ [**10 поена**], одакле следи да је $x = -2$, па је тражени број $-\frac{2}{7}$ [**10 поена**].

2. Постоји 6 бројева мањих од 100 у чијем се запису користе две различите цифре *a* и *b*: a, b, $\overline{aa}$, $\overline{ab}$, $\overline{ba}$, $\overline{bb}$ [**3 поена**]. Њихов збир је $a + b + (10a + a) + (10a + b) + (10b + a) + (10b + b) = 23 \cdot (a + b)$, па не може бити једнак 100 јер број 100 није дељив са 23 [**5 поена**]. Дакле, Филип није могао да напише 6 бројева [**4 поена**]. Пет бројева је могао да напише јер је, на пример, $1 + 6 + 11 + 16 + 66 = 100$ [**8 поена**]

3. Нека је *p* број плавих, *z* број зелених, а *c* број црвених куглица. Како се међу 8 извучених куглица налази 1 црвена, то је $p + z = 7$ [**4 поена**]. Слично је $p + c = 9$ [**4 поена**]. Ако се међу 11 извучених куглица налазе куглице све три боје, онда их међу 10 не мора бити, тј. свих 10 могу бити у две боје, то је $c + z = 10$ [**6 поена**]. Сабирајући ове једнакости добијамо $p + z + c = 13$ [**3 поена**], па је $p = 3$, $z = 4$ и $c = 6$ [**3 поена**].

4. Нека је *x* дужина планираног пута. Из $\left(\frac{7}{11} - \frac{2}{7}\right) \cdot x = 54$ [**8 поена**], добијамо $\frac{27}{77} \cdot x = 54$ [**6 поена**], па је $x = 154$ km [**6 поена**].

5. Из троугла *AEC* налазимо да је $\alpha + 38° = 84°$, па је $\alpha = 46°$ [**8 поена**]. Из троугла *ABD* добијамо $\beta = 180° - \left(94° + \frac{\alpha}{2}\right) = 63°$ [**4 поена**], а из троугла *ABC* је $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 71°$ [**4 поена**]. Дакле, најкраћа је страница *BC*, а најдужа *AB* [**4 поена**].



Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа

21.03.2021.

VII разред

1. Упореди вредност израза $\dfrac{36\cdot(-6)^2\cdot 3^6}{12^3\cdot 3^5}$ и број $\sqrt{\dfrac{79}{25}}$.

2. Шеснаест радника је за 5 дана завршило $\dfrac{4}{9}$ неког посла. Колико радника треба још ангажовати да би преостали део посла, радећи истим темпом, завршили за 4 дана?

3. У једнакокракоправоугли троугао ABC са катетама $AC = BC = 1$ cm уписана је полукружница k са центром O на катети AC. Ова полукружница садржи теме C и додирује хипотенузу AB. Одреди дужину полупречника r ове полукружнице.

4. У трапезу $ABCD$ краци су $AD = 3$ cm и $BC = 4$ cm, краћа основица $DC = 4$ cm и дијагонала $AC = 4$ cm. Одреди дужину дијагонале BD.

5. На полицу треба распоредити девет различитих књига означених бројевима од 1 до 9. На колико начина је то могуће да се уради тако да:
а) књига 1 и књига 2 буду једна до друге?
б) књига 1 и књига 2 не буду једна до друге?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

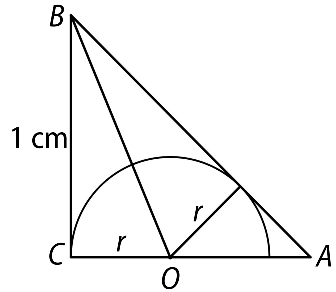
VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

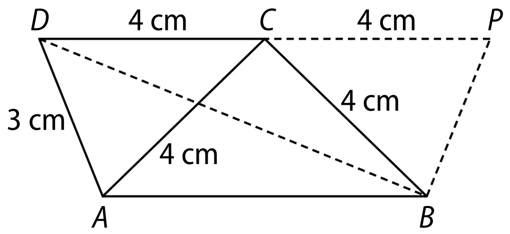
1. (**МЛ 55/2**) $\dfrac{36\cdot(-6)^2\cdot 3^6}{12^3\cdot 3^5}=\dfrac{9}{4}$ [**8 поена**]. Како је $\dfrac{81}{16}>\dfrac{79}{25}$ (јер је $2025 = 81\cdot 25 > 16\cdot 79 = 1264$), то је $\dfrac{36\cdot(-6)^2\cdot 3^6}{12^3\cdot 3^5}>\sqrt{\dfrac{79}{25}}$ [**12 поена**].

2. 16 радника је за један дан урадило $\dfrac{4}{45}$ посла [**3 поена**]. Да би радници за 4 дана завршили $\dfrac{5}{9}$ посла, они дневно треба да ураде $\dfrac{5}{36}$ посла [**3 поена**]. Ако са x означимо број радника потребних да се посао заврши за 4 дана, онда важи $16 : x = \dfrac{4}{45} : \dfrac{5}{36}$ [**8 поена**], одакле је $x = 25$ [**4 поена**]. Дакле, потребно је ангажовати још $25 - 16 = 9$ радника [**2 поена**].

3. Могу се изразити површине троуглова AOB, OCB и ACB: $P_{\Delta AOB} = \dfrac{AB\cdot r}{2}=\dfrac{r\sqrt{2}}{2}$ [**3 поена**], $P_{\Delta OCB} = \dfrac{r}{2}$ [**3 поена**], $P_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}$ [**3 поена**]. Како је $P_{\Delta AOB} + P_{\Delta OCB} = P_{\Delta ABC}$, следи да је $\dfrac{r\sqrt{2}}{2}+\dfrac{r}{2}=\dfrac{1}{2}$ [**8 поена**], тј. $r=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}\text{ cm}=(\sqrt{2}-1)\text{ cm}$ [**3 поена**].



4. Нека је P тачка праве DC таква да је $CP = 4$ cm. Тада је $CP = CB$ и $CD = CB$, па су троуглови BCD и BCP једнакокраки и $\measuredangle CBP = \measuredangle CPB$ и $\measuredangle CDB = \measuredangle CBD$, па је $\measuredangle DBP = \measuredangle DBC + \measuredangle CBP = \dfrac{\measuredangle BCP}{2} + \dfrac{\measuredangle BCD}{2} = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ [**8 поена**]. Из подударности троуглова DAC и PBC може се закључити да је $PB = 3$ cm [**5 поена**]. По Питагориној теореми налазимо да је $DB = \sqrt{DP^2 - PB^2} = \sqrt{55}$ cm [**7 поена**].



5. а) Књиге 1 и 2 посматрајмо као једну. Преосталих седам књига и ова (1, 2) могу се распоредити на $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ начина [**6 поена**]. Како се књиге 1 и 2 могу распоредити на 2 начина, укупан број начина је $2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ [**4 поена**].
б) Свих 9 књига могу се распоредити на $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ начина [**4 поена**]. Ако од овог броја одузмемо број распореда када су књиге 1 и 2 суседне, добијамо број распореда када књиге 1 и 2 нису суседне: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ [**6 поена**].
Напомена: Не очекује се од ученика да израчунају вредности израза 9! и 8!, као ни израза у којима они учествују.

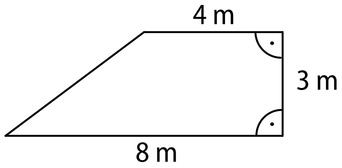
Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике
ученика основних школа

21.03.2021.

VIII разред

1. За основу бетонског стуба, стуб је облика праве призме, потребно је ископати јаму дубоку 1,5 m (основа приказана на слици). За колико сати ће јаму ископати три радника ако сваки од њих ископа 0,75 m^3 за 1 час?



2. Бочна страна правилне тростране пирамиде је једнакокраки троугао са углом од 30° при врху. Дужина бочне ивице је 8 cm. Израчунати површину те пирамиде.

3. Одреди целе бројеве x и y тако да важи

$$2019x^4 + 2020y^4 = 2021^{2021}.$$

4. Од 10 различитих цветова треба направити букет у коме се налазе бар два цвета. На колико начина се то може направити?

5. Решити једначину

$$|2x+21| - |x-20| = 2021.$$

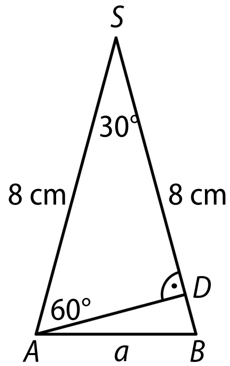
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 55/2**) Запремина јаме је $\dfrac{8\text{ m}+4\text{ m}}{2}\cdot 3\text{ m}\cdot 1{,}5\text{ m} = 27\text{ m}^3$ [**10 поена**]. Три радника за један час ископају 2,25 m^3 земље [**2 поена**], па ће читаву земљу ископати за 27 : 2,25 = 12 часова [**8 поена**].

2. Означимо са a основну ивицу пирамиде $ABCS$. Површина бочне стране ABS једнака је $\dfrac{BS\cdot AD}{2} =$ 16 cm^2 [**6 поена**], па је површина омотача пирамиде M = 3 · 16 cm^2 = 48 cm^2 [**2 поена**]. У троуглу ADS имамо да је $DS = \sqrt{AS^2 - AD^2} = 4\sqrt{3}$ cm, па из троугла ABD је $a^2 = AD^2 + DB^2 = 16 + (8-4\sqrt{3})^2 =$ $64\cdot(2-\sqrt{3})$ cm^2 [**5 поена**], па је површина основе пирамиде $B = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 16\cdot(2\sqrt{3}-3)$ cm^2 [**2 поена**], а површина пирамиде $P = B + M = 32\sqrt{3}$ cm^2 [**5 поена**]



3. Последња цифра четвртог степена целог броја може да буде 0, 1, 5 или 6 [**4 поена**], па последња цифра броја 2019x^4 може да буде 0, 9, 5 или 4 [**4 поена**], а броја 2020y^4 је 0 [**2 поена**]. Дакле, последња цифра израза 2019x^4 + 2020y^4 је 0, 9, 5 или 4 [**6 поена**]. Последња цифра броја 2021^{2021} је 1 [**2 поена**], па дата једначина нема решења у скупу целих бројева [**2 поена**].

4. Израчунајмо прво на колико начина се може изабрати 0, 1, 2, ..., 9 или свих 10 цветова. Ако један цвет изаберемо, означимо га са 1, а ако га не изаберемо, означимо га са 0. За сваки цвет постоје две могућности, 0 или 1, па је број избора $\underbrace{2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2}_{10} = 2^{10}$ [**6 поена**]. Од овог броја треба да одузмемо оне изборе у којима нема ниједног цвета, а то је само један избор, и оне у којима је по један цвет, а то је десет избора [**6 поена**]. Дакле, укупан број начина на који можемо да изаберемо букет је 2^{10} – 10 – 1 = 1013 [**8 поена**].

5. Како је $|2x+21|=\begin{cases} 2x+21, & x \geq -10,5 \\ -2x-21, & x < -10,5 \end{cases}$ и $|x-20|=\begin{cases} x-20, & x \geq 20 \\ 20-x, & x < 20 \end{cases}$

[**5 поена**], разликујемо три случаја:

1°) За $x \geq 20$ добијамо једначину $2x + 21 - x + 20 = 2021$, чије је решење $x = 1980$ [**5 поена**].

2°) За $-10,5 \leq x < 20$ добијамо једначину $-2x - 21 - x + 20 = 2021$, чије је решење $x = -\frac{2022}{3}$. Како је $-\frac{2022}{3} < -10,5$ у овом случају немамо решења [**5 поена**].

3°) За $-10,5 < x$ добијамо једначину $-2x - 21 - 20 + x = 2021$, чије је решење $x = -2062$ [**5 поена**].

Дакле, решења једначине су $x \in \{-2062, 1980\}$.