

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VIII РАЗЕД

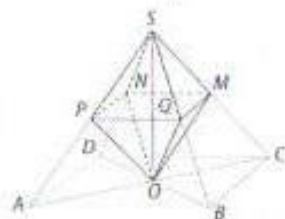
1. (МЛ 44-4) Осе координатног система и график формирају троугао чије су катете 1 и 2 (5 бодова). Тражено растојање је висина која одговара хипотенузи овог троугла. Хипотенуза овог троугла је $\sqrt{5}$ (5 бодова). Како је површина овог троугла 1, висина која одговара хипотенузи, а самим тим и тражено растојање, је $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (10 бодова).
2. $||2012 - x| - 2011| = 2013$ па је $|2012 - x| - 2011 = 2013$ или $|2012 - x| - 2011 = -2013$ (5 бодова). Сада је $|2012 - x| = 4024$ док је случај $|2012 - x| = -2$ немогућ (5 бодова). Дакле имамо $2012 - x = 4024$ или $2012 - x = -4024$ па је $x = -2012$ (5 бодова) или $x = 6036$ (5 бодова).

3. Висину пирамиде рачунамо као катету правоуглог троугла OBS . Како је $BS = a$ и $BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, то је $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (5 бодова). $PQ = OM = MN = NP = \frac{a}{2}$ (средње линије једнакостраничних троуглова странице a). $PS = QS = MS = NS = \frac{a}{2}$ (половине

ивица дужина a). $PO = QO = MO = NO = \frac{a}{2}$ (сре-

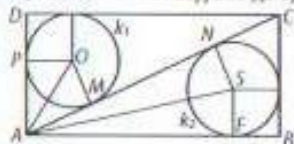
дње линије троуглова и паралелне са страницом дужине a) (5 бодова). Дакле, тело $OPQMNS$ се састоји од две једнакоивичне четворостране пирамиде странице $\frac{a}{2}$ које су спојене по основи. Површина тела се састоји од осам троугло-

ва и једнака је $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ (5 бодова). Запремина је једнака $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$ (5 бодова).



4. Нека је x број коцки ивице 1cm, y број коцки ивице 2cm и z број коцки ивице 3cm. Тада је $x + 8y + 27z = 13^3$ и $x + y + z = 2012$ (5 бодова). Одузимањем друге једначине од прве добијамо $7y + 26z = 185$. Како је $0 \leq 26z \leq 185$, то је $0 \leq z \leq 7$. Само у случају $z = 2$ имамо да је $y = 19$, а заменом у првој једначини $x = 1991$. Дакле, могуће је расећи дату коцку на 2012 мањих и то 1991 коцку чија је ивица 1cm, 19 коцки чија је ивица 2cm и 2 коцке чија је ивица 3cm (15 бодова).

5. Означимо са k_1 круг уписан у троугао ACD , а са k_2 круг уписан у троугао ABC . Означимо са P тачку додира круга k_1 и странице AD , а са F тачку додира круга k_2 и странице AB . Троуглови AFS и ANS су подударни јер је $AS = AS$, $SN = SF = r$, $\sphericalangle SFA = \sphericalangle SNA = 90^\circ$ па је $AN = AF = a - r$ (10 бодова). Аналогно показујемо да су троуглови APQ и AMO подударни па је $AM = AP = b - r$. Сада је $MN = AN - AM = a - b$ (10 бодова).



Признавати и максималним бодовати свако тачно решење које није у кључу.

Министарство просвете и науке Републике Србије ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

31.03.2012.

VIII РАЗРЕД

1. Одреди растојање координатног почетка од графика функције $y = -2x + 2$.

2. Реши једначину

$$|2013 - ||2012 - x| - 2011|| = 0.$$

3. Ивица четворостране једнакоивичне пирамиде $SABCD$ је a . Тачке P, Q, M, N су средишта бочних ивица AS, BS, CS и DS , редом, а тачка O је подножје висине пирамиде из врха S . Израчунај површину и запремину тела $OPQMNS$.

4. Да ли се коцка ивице 13cm може исећи на 2012 мањих коцки чије су ивице 1cm, 2cm или 3cm?

5. Нека је $ABCD$ правоугаоник са страницама a и b ($a > b$). Кружнице уписане у троуглове ABC и ACD додирују дијагоналу AC у тачкама M и N . Одреди дужину дужи MN .

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 150 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.