РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VII РАЗЕД

1. (МЛ 44-4) Групишући чланове израза на следећи начин $-(x^2-2x)-(z^2-6z)-y^2$ и допуњујући изразе у заградама до квадрата бинома, добијамо $-(x^2-2x+1-1)-(z^2-6z+9-9)-y^2=-(x-1)^2+1-(z-3)^2+9-y^2$ (**10 бодова**). Како је вредност квадрата реалног броја ненегативан број, а у изразу је испред сваког квадрата бинома предзнак „–", дати израз има највећу вредност за $(x-1)^2=0$, $(z-3)^2=0$ и $y^2=0$, тј. $x=1$, $z=3$ и $y=0$, и његова вредност у тој случају је 10 (**10 бодова**).

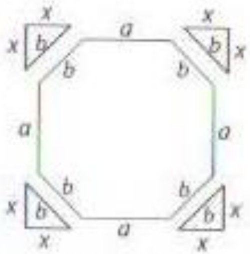
2. $n=2^{20}\cdot 3^{15}\cdot 5^{10}=2^{10}\cdot 3^{15}\cdot 10^{10}=6^{10}\cdot 3^{5}\cdot 10^{10}$.

а) n се завршава са 10 нула (**5 бодова**).

б) Како је последња цифра броја 6^{10} цифра 6, а броја 3^5 цифра 3, то је прва цифра с десна на лево различита од нуле 8 (...6 · ...3 = ...8) (**10 бодова**).

в) $21\cdot 16\cdot 11=3696$ (**5 бодова**).

3. Страница квадрата је 12cm (**2 бода**). Како је обим осмоугла једнак збиру обима четири подударна троугла и како су странице означене са b све међусобно једнаке, имамо да је $8x=4a$, односно $a=2x$. Сада је $2x+a=12\text{cm}$, па је $a=6\text{cm}$, $x=3\text{cm}$ (**8 бодова**). Применом Питагорине теореме на правоугли троугао добијамо да је $b=3\sqrt{2}\text{cm}$. Обим осмоугла је $O=4a+4b=12\cdot(2+\sqrt{2})\text{cm}$ (**5 бодова**). Површина осмоугла једнака је разлици површине квадрата и четири једнакокрако правоугла троугла. Дакле, $P=126\text{cm}^2$ (**5 бодова**).



4. Како је:

$x^6-4x^5+4x^4-81x^2+324x-324=0$, $x^4(x^2-4x+4)-81\cdot(x^2-4x+4)=0$,

$(x^4-81)(x^2-4x+4)=0$ (**5 бодова**), $(x^2+9)(x-3)(x+3)(x-2)^2=0$ (**10 бодова**),

решења су $x\in\{3,-3,2\}$ (**5 бодова**).

5. Ако је n укупан број тачака, број дужи који се може добити спајањем тих n тачака је $\frac{n(n-1)}{2}$ (**5 бодова**). Како је $\frac{11\cdot 10}{2}<60<\frac{12\cdot 11}{2}$ закључујемо да је број тачака које је Воја нацртао 12. Како је укупан број дужи са 11 тачака једнак 55, закључујемо да је из последње тачке повукао $60-55=5$ дужи (**15 бодова**).

Признавати и са максималним бројем бодова оценити свако тачно решење које није у кључу.

Министарство просвете и науке Републике Србије

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА
31.03.2012.
VII РАЗРЕД

1. За које вредности променљивих x, y и z је вредност израза

$$2x+6z-x^2-y^2-z^2$$

највећа? Одреди вредност тог израза.

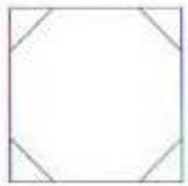
2. Дат је природан број $n=2^{20}\cdot 3^{15}\cdot 5^{10}$.

а) Са колико нула се завршава број n?

б) Која је прва цифра, с десна на лево, у броју n која је различита од 0?

в) Колико различитих делилаца има број n?

3. Од квадрата површине 144cm^2 „одсечена" су четири (међусобно) подударна једнакокрака правоугла троугла (види слику). Обим новодобијеног осмоугла једнак је збиру обима „одсечених" троуглова. Израчунај обим и површину тог осмоугла.



4. Реши једначину у скупу реалних бројева:

$$x^6-4x^5+4x^4-81x^2+324x-324=0.$$

5. Воја је означио на кружници n тачака. $n-1$ тачку је спојио сваку са сваком, а онда је и n-ту тачку спојио са некима од њих. Када је пребројао, видео је да је повукао 60 дужи. Колико дужи је повукао из тачке коју није спојио са свим осталим тачкама?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.