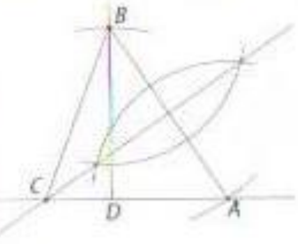
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - VI РАЗЕД

1. (МЛ 44-3)

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(3-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(4-\frac{4}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(9-\frac{9}{10}\right):14\frac{2}{5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{16}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{81}{10}:\frac{72}{5}.$$

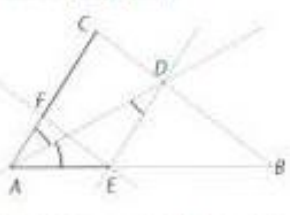
После скраћивања одговарајућих имениоца са бројиоцем (2 са 4, 3 са 9, 4 са 16, итд.) добијамо следеће: $\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{1}\cdot\ldots\cdot\frac{9}{2\cdot 5}\cdot\frac{5}{8\cdot 9}$. Скраћивањем преосталих бројева у имениоцу са истим бројевима у бројиоцу остаће нам производ $3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7=2520$ (**20 бодова**).

2. Означимо подножје висине из темена B основице AB на крак AC са D. Троугао ABD је правоугли и позната је дужина његове хипотенузе и једне катете, па га можемо конструисати (**10 бодова**). Како је троугао ABC једнакокрак, то се теме C налази на симетрали основице троугла AB. Конструкцијом симетрале странице AB у пресеку са правом AD добијамо треће теме троугла (**10 бодова**).



3. $\overline{xyzxyz}=\overline{xyz000}+\overline{xyz}=1000\cdot\overline{xyz}+\overline{xyz}=1001\cdot\overline{xyz}$ (**10 бодова**). Сада имамо $\overline{xx}\cdot\overline{yz}\cdot\overline{xyz}=1001\overline{xyz}$, $1001\overline{xyz}-\overline{xx}\cdot\overline{yz}\cdot\overline{xyz}=0$, одакле је $\overline{xyz}\cdot(1001-\overline{xx}\cdot\overline{yz})=0$ (**5 бодова**). Овај производ је једнак 0 ако је $\overline{xx}\cdot\overline{yz}=1001$. Како је $1001=7\cdot 11\cdot 13=11\cdot 91=77\cdot 13$, закључујемо да је $x=7$, $y=1$ и $z=3$ (**5 бодова**).

4. Права AD је симетрала $\measuredangle BAC$ па је $\measuredangle BAD=\measuredangle CAD$. $\measuredangle CAD=\measuredangle ADE$ (углови са паралелним крацима) па је $\measuredangle DAE=\measuredangle ADE$ (**5 бодова**). Сада је троугао ADE једнакокрак и $AE=DE$ (**5 бодова**). Четвороугао $EDCF$ је паралелограм (наспрамне странице су конструисане тако да буду паралелне) па је $CF=DE$. Дакле, како је $AE=DE$ и $CF=DE$, то је и $AE=CF$ (**10 бодова**).



5. На основу трећег броја видимо да у запису Мајиног броја нема цифара 2 и 5. Сада на основу прва два броја закључујемо да се у запису Мајиног броја појављују цифре 1, 3, 4 и 6 (**5 бодова**). Ако је у првом броју погодио позицију цифре 1, то значи да је у другом броју погодио позицију цифре 3 и у том случају Мајин број је 6314. Међутим, ако је погодио позицију цифре 4 у првом броју, онда у другом броју може бити добра само позиција цифре 6 па је тражени број 4163 (ако је погодио позицију цифре 3 онда и цифра 1 и цифра 6 морају бити на четвртој позицији што је немогуће). Дакле, како за задате услове постоје две тачне могућности Ненад не може из четвртог пута са сигурношћу да каже тачан број већ само може да погађа (**15 бодова**).

Признавати и са максималним бројем бодова оценити свако тачно решење које није у кључу.

Министарство просвете и науке Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА
31.03.2012.
VI РАЗРЕД

1. Израчунај вредност израза:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(3-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(4-\frac{4}{5}\right)\cdots\left(9-\frac{9}{10}\right):14\frac{2}{5}.$$

2. Конструиши једнакокраки троугао ако је основица троугла 5cm и висина која одговара краку 4cm.

3. Дешифруј множење $\overline{xx}\cdot\overline{yz}\cdot\overline{xyz}=\overline{xyzxyz}$, ако истим словима одговарају исте цифре, а различитим словима различите цифре.

4. У троуглу ABC симетрала угла BAC сече страницу BC у тачки D. Права која садржи тачку D и паралелна је страници AC сече страницу AB у тачки E. Права која садржи тачку E и паралелна је са BC сече страницу AC у тачки F. Докажи да је $AE=FC$.

5. Користећи цифре 1, 2, 3, 4, 5, 6 Маја је написала један четвороцифрени број (једна цифра може више пута да се искористи). Ненад је хтео да погоди тај број, па је рекао први пут 4215 и погодио је две цифре али само је једну рекао на одговарајућем месту. Други пут је рекао 2365 и опет погодио две цифре и то једну на одговарајућем месту. Трећи пут је рекао 5525, али тада није погодио ни једну цифру. Да ли може из четвртог пута да каже Мајин број, или још увек може само да погађа? Образложи одговор.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.